Материалы для проведения регионального этапа

XLIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2022–2023 учебный год

Второй день

13–14 февраля 2023 г.

Москва, 2023

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, М. А. Дидин, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2022–2023 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **13 февраля 2023 г.** (I тур) и **14 февраля 2023 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2022–2023 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geqslant 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Замечание. Можно показать, что $S_{m+1} > S_m$ только тогда, когда число $m+1$ является степенью некоторого простого числа p; в этом случае отношение S_{m+1}/S_m будет равно p.

Комментарий. Заявлено, что S_{m+1}/S_m не может делиться на квадрат простого числа, но это утверждение не доказано или доказано неверно — 1 балл.

9.7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\frac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d. (*Л. Самойлов*)

Ответ. $d = 7$.

Решение. Докажем, что $d \geqslant 7$. Все числа с доски разбиваются на *цепочки* чисел вида $a, a+1, a+2, \ldots, a+t$ так, что числа из разных цепочек не отличаются ровно на 1. Такое разбиение нетрудно построить, соединив любые два числа, отличающиеся на 1, отрезком и рассмотрев полученные ломаные.

Пусть получилось k цепочек, в которых $n_1, n_2, \ldots, n_k$ чисел соответственно (некоторые цепочки могут состоять из одного числа). В цепочке из n_i чисел есть ровно $n_i - 1$ пара чисел, отличающихся на 1. Поэтому общее количество единиц в тетрадке

равно
$$(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_k-1)=(n_1+n_2+\ldots+n_k)-k=99-k,$$
откуда $k=99-85=14$. Значит, в одной из цепочек не меньше, чем $99/14$ чисел, то есть не меньше 8 чисел. Разность наибольшего и наименьшего чисел в такой цепочке не меньше $8-1=7$.

Осталось привести пример, в котором $d=7$. Такой пример дают, например, числа
$$0=\frac{0}{14},\ \frac{1}{14},\ \frac{2}{14},\ \ldots,\ \frac{98}{14}=7.$$
Действительно, в этом примере $d=7$, и ровно для первых 85 из этих чисел в наборе есть число, на единицу большее.

Замечание. Приведённый пример — не единственный. Все возможные оптимальные примеры устроены так: есть ровно одна цепочка из 8 чисел (от a до $a+7$), а также 13 цепочек, каждая — из 7 чисел; все числа этих остальных цепочек должны располагаться между a и $a+7$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён только пример с $d=7$, удовлетворяющий условиям задачи — 2 балла.

Приведена только оценка, показывающая, что $d\geqslant 7$ — 5 баллов.

Сформулированное утверждение о том, что все числа разбиваются на цепочки, в каждой из которых числа отличаются на 1 (а разности чисел из разных цепочек не равны 1), принимается без доказательства. Сформулированное утверждение, что в цепочке из n_i чисел не более n_i-1 единичных разностей, тоже принимается без доказательства.

9.8. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB<BC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а H — основание высоты, опущенной из вершины B. Вписанная окружность касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через K и параллельная MH, пересекает отрезок MN в точке P. Докажите, что в четырехугольник $AMPK$ можно вписать окружность. *(П. Бибиков)*

Первое решение. Совершим гомотетию с центром A и коэффициентом 2. При этой гомотетии точки M и N переходят в B и C соответственно; пусть точки K и P переходят соответственно в K' и P' (см. рис. 1). Тогда достаточно доказать, что четырёхугольник $ABP'K'$ описан. Мы докажем, что он описан около вписанной окружности ω треугольника ABC. Три стороны четырёхугольника уже касаются ω, поэтому достаточно доказать, что её касается $P'K'$.

Пусть I — центр ω. Тогда $KK' = AK$, поэтому A и K' симметричны относительно KI. Далее заметим, что $\angle P'K'A = \angle PKA = \angle MHA$. Но MH — медиана в прямоугольном треугольнике AHB, поэтому $\angle MHA = \angle MAC$. Значит, $\angle P'K'A = \angle BAC$. Значит, и прямые AB и $K'P'$ также симметричны относительно KI; поскольку одна из них касается ω, то и другая тоже. Это и требовалось доказать.

Замечание. У решения выше есть несколько вариаций. Например, похожими рассуждениями можно показать, что в четырёхугольнике $AMPK$ биссектрисы трёх углов A, M и K проходят через одну точку — середину отрезка AI. Отсюда следует, что эта середина — центр искомой вписанной окружности.

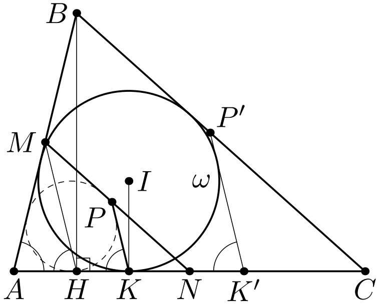

Рис. 1

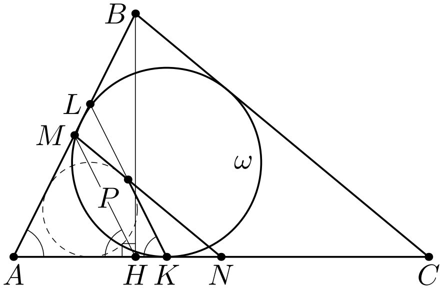

Рис. 2

Второе решение. Пусть прямая PK пересекает прямую AB в точке L (см. рис. 2). Как и в решении выше, получаем, что $\angle AKL = \angle AHM = \angle LAK$, откуда $LA = LK$.

Мы докажем, что окружности, вписанные в треугольники AKL и AMN, совпадают (тогда это и будет вписанная окружность четырёхугольника $AMPK$). Поскольку обе окружности вписаны в угол BAC, для этого достаточно показать, что они касаются прямой AB в одной и той же точке. Как известно, расстояния от A до точек касания этих окружностей с AB

равны соответственно $\frac{AL+AK-KL}{2}$ и $\frac{AM+AN-MN}{2}$. Значит, нам надо доказать, что $AL+AK-KL=AM+AN-MN$, или что $ML-KL=KN-MN$.

Обозначим полупериметр треугольника ABC через p, и пусть $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. Имеем $ML-KL=(AL-AM)-KL=-AM=-\frac{c}{2}$. С другой стороны, $KN-MN=(AN-AK)-MN=\left(\frac{b}{2}-(p-a)\right)-\frac{a}{2}=\frac{a+b}{2}-p=-\frac{c}{2}$, откуда и следует искомое равенство.

Замечание. Во втором абзаце решения по сути доказан следующий известный признак: четырёхугольнике $AMPK$ описан тогда и только тогда, когда $ML-KL=KN-MN$ (где N и L — точки пересечения продолжений боковых сторон, расположенные как на рисунке).

Комментарий. Признак описанности, сформулированный в замечании выше, принимается без доказательства.

9.9. Найдите наибольшее число m такое, что для любых положительных чисел a, b и c, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\geqslant m.$$

(*Л. Емельянов*)

Ответ. $m=1$.

Первое решение. Докажем сначала, что $m=1$ удовлетворяет требованиям задачи. Заметим, что $ab+c=ab+c(a+b+c)=(c+a)(c+b)$. Следовательно,

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=$$

$$=\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}+\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(b+a)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{ab}\sqrt{a+b}+\sqrt{bc}\sqrt{b+c}+\sqrt{ca}\sqrt{c+a}}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}.$$

Значит, осталось доказать неравенство

$$\sqrt{ab}\sqrt{a+b}+\sqrt{bc}\sqrt{b+c}+\sqrt{ca}\sqrt{c+a}\geqslant\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Возведем это неравенство в квадрат; оно примет вид

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}+$$
$$+2\sqrt{bc^2a(b+c)(c+a)}+2\sqrt{ca^2b(c+a)(a+b)}\geqslant$$
$$\geqslant a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2+2abc.$$

После сокращения слева останется сумма корней, а справа — $2abc$. Но любой из корней не меньше, чем abc; действительно, например, $\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}\geqslant\sqrt{ab^2c\cdot ac}=abc$. Отсюда и следует требуемое.

Осталось доказать, что при любом $m>1$ неравенство выполнено не всегда; достаточно это сделать при $1<m<3$. Пусть $m=1+2t$ при $0<t<1$. Положим $a=b=\frac{1-t^2}{2}$ и $c=t^2$. Тогда $a+b+c=1$, однако

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}<\sqrt{\frac{ab}{ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}=1+2t=m.$$

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что $m=1$ подходит. Для этого докажем, что если a — наибольшее из чисел a, b, c, то верно даже неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\geqslant 1.$$

Обозначим $t=1/a$, $\mu=b/c$; заметим, что $1>a\geqslant\frac{1}{3}$, поэтому $1<t\leqslant 3$. Левая часть неравенства выше переписывается как

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sqrt{\frac{1}{1+c/(ab)}}+\sqrt{\frac{1}{1+b/(ac)}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+t/\mu}}+\frac{1}{\sqrt{1+t\mu}}.$$

Значит, нам достаточно доказать, что

$$\sqrt{1+t/\mu}+\sqrt{1+t\mu}\geqslant\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)}.$$

Возводя это неравенство в квадрат, получаем

$$1+t/\mu+1+t\mu+2\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)}\geqslant 1+t/\mu+t\mu+t^2;$$

после сокражения подобных слагаемых получаем, что нам достаточно доказать неравенство

$$2\sqrt{(1+t/\mu)(1+t\mu)}\geqslant t^2-1=(t-1)(t+1).$$

Наконец, это неравенство вытекает из неравенств $2 \geqslant t-1$ (поскольку $t \leqslant 3$) и

$$(1+t/\mu)(1+t\mu) = 1+t^2+t(\mu+1/\mu) \geqslant 1+t^2+2t = (t+1)^2,$$

где мы применили неравенство о средних.

Комментарий. Только пример, показывающий, что при любом $m > 1$ неравенство выполнено не всегда — 2 балла.

Только доказательство того, что $m = 1$ удовлетворяет требованиям задачи — 5 баллов.

9.10. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зелёным. Назовём *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно k лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более $k/100$ переключателей с красной грани.

(*С. Кудря, И. Богданов*)

Решение. Ясно, что результат нажатия нескольких переключателей не зависит от того, в каком порядке эти нажатия были произведены — количество переключений каждой лампочки не зависит от этого порядка. В частности, можно считать, что Петя использовал каждый переключатель не более одного раза.

Весь куб разбивается на 100 *слоёв*, параллельных красной грани. Каждый переключатель на некрасной грани переключает лампочки в одном слое, а каждый переключатель на красной грани — по лампочке во всех 100 слоях.

После действий Пети найдётся слой, в котором включено $d \leqslant k/100$ лампочек — назовём один такой слой *главным*. Пусть $\mathcal{V}$ — набор из d переключателей на красной грани, связанных со включёнными лампочками в главном слое. Мы докажем, что Вася сможет погасить все лампочки, использовав с красной грани ровно эти переключатели.

Запустим несколько другой процесс, начиная с того же исходного положения. Пусть $\mathcal{P}$ — набор переключателей с красной грани, использованных Петей, а $\mathcal{Q}$ — набор использованных им переключателей с некрасных граней, связанных с главным слоем. Пусть Петя применит $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, а затем Вася применит $\mathcal{V}$. После действий Пети в главном слое будут гореть те же d лампочек, что и раньше, а значит, после действий Вася все лампочки в главном слое будут погашены. Если теперь Вася применит в каждом из остальных слоёв наборы переключателей с некрасных граней, аналогичные $\mathcal{Q}$, то все лампочки будут погашены.

Пусть теперь Петя применит все остальные переключатели (с некрасных граней!), которые он применял исходно, а Вася применит их ещё по разу. Все лампочки по-прежнему будут погашены. При этом в новом процессе Петя применил ровно те же переключатели, что и в исходном, а Вася использовал лишь переключатели набора $\mathcal{V}$ с красной грани (и какие-то — с остальных граней). Значит, если в исходном процессе Вася совершит те же действия, которые он сделал в новом, он добьётся требуемого.

Комментарий. Замечание о том, что результат не зависит от порядка нажатий, принимается без обоснований.

Выбран слой, в котором горит $d \leqslant k/100$ лампочек, и утверждается, что Вася может обойтись ровно переключателями с красной грани, переключающими эти d лампочек (а доказательство этого факта отсутствует или неверно) — 2 балла.

10 класс

10.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? *(А. Кузнецов)*

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geqslant 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Замечание. Можно показать, что $S_{m+1} > S_m$ только тогда, когда число $m+1$ является степенью некоторого простого числа p; в этом случае отношение S_{m+1}/S_m будет равно p.

Комментарий. Заявлено, что S_{m+1}/S_m не может делиться на квадрат простого числа, но это утверждение не доказано или доказано неверно — 1 балл.

10.7. Петя взял некоторые трёхзначные натуральные числа $a_0, a_1, \ldots, a_9$ и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень. *(А. Кузнецов, А. Антропов)*

Решение. Пусть $\overline{x_iy_iz_i}$ — десятичная запись трехзначного числа a_i. Подстановка в левую часть уравнения $x = 1000$ даёт $a_9 \cdot 1000^9 + a_8 \cdot 1000^8 + \ldots + a_1 \cdot 1000 + a_0 = \overline{x_9y_9z_9\underbrace{0000\ldots0}_{27\text{ нулей}}} + \overline{x_8y_8z_8\underbrace{0\ldots0}_{24\text{ нуля}}} + \ldots + \overline{x_1y_1z_1000} + \overline{x_0y_0z_0} = \overline{x_9y_9z_9x_8y_8z_8\ldots x_0y_0z_0}$. Таким образом, после подстановки вместо звёздочки 30-значного числа $\overline{x_9y_9z_9x_8y_8z_8\ldots x_0y_0z_0}$ получится уравнение, имеющее корень 1000.

Комментарий. Заявлено, но не доказано, что при последовательной подстановке $x = 1, 2, 3, \ldots, k, k+1, \ldots$ значения левой части не «перепрыгнут» через 30-значные числа — 1 балл.

10.8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. На стороне AB выбрана точка L так, что

$AL = CK$. Отрезки AK и CL пересекаются в точке M. На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка N. Известно, что четырёхугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90^\circ$. *(А. Кузнецов)*

Первое решение. Поскольку AM — биссектриса угла LAN, отрезки LM и MN равны как хорды, стягивающие равные дуги (см. рис. 3). Теперь достаточно доказать, что $CM = LM$ (тогда $CM = LM = MN$, значит, CNL — прямоугольный треугольник, и NM — его медиана, проведенная из прямого угла).

Так как $\angle BKA = \angle NAK = \angle BAK$, треугольник ABK — равнобедренный (симметричный относительно серединного перпендикуляра к AK). Отметим на стороне BK точку X так, что $LX \parallel AK$. Из симметрии треугольника ABK имеем $KX = AL$. Тогда имеем $KX = CK$ и $MK \parallel LX$, значит, MK — средняя линия треугольника CLX, значит, $CM = LM$, что завершает решение.

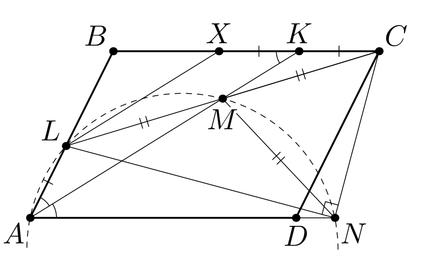

Рис. 3

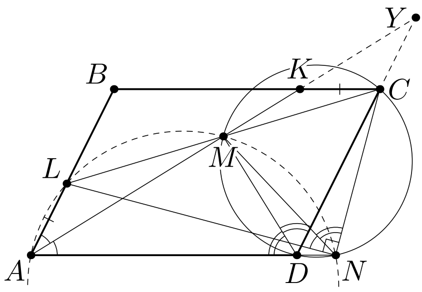

Рис. 4

Второе решение. Пусть $\angle BAD = 2\alpha$.

Заметим, что DM — биссектриса угла ADC. Действительно, продлим AK до пересечения с CD в точке Y (см. рис. 4). Тогда, используя подобия $AML \sim YMC$ и $AYD \sim KYC$, имеем $AM/MY = AL/YC = CK/YC = AD/DY$. Из полученного равенства $AM/MY = AD/DY$ вытекает, что DM — биссектриса треугольника ADY. Отсюда $\angle MDC = \angle ADC/2 = (180^\circ - 2\alpha)/2 = 90^\circ - \alpha$.

Из вписанности $ALMN$ имеем $\angle CMN = \angle LAD$, а из параллельности $AB \parallel CD$ следует $\angle LAD = \angle CDN$. Поэтому

$\angle CMN = \angle CDN$, значит, четырёхугольник $CMDN$ — вписанный. Отсюда $\angle MNC = \angle MDC = 90^\circ - \alpha$.

Из вписанности $\angle LNM = \angle LAM = \alpha$. Тогда $\angle LNC = \angle MNC + \angle LNM = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что в решении 2 при доказательстве того, что DM — биссектриса угла ADC, не использовалось то, что AM — биссектриса угла A. А при доказательстве вписанности $CMDN$ не использовалось также равенство $AL = CK$.

Комментарий. В случае, если задача не решена, оцениваются следующие продвижения. При этом баллы за продвижения суммируются, если их сумма не превосходит 3, иначе за все продвижения ставится 3 балла.

Доказано, что $LM = MN$ — 1 балл.

Доказано, что $LM = CM$ — 2 балла.

Доказано, что DM является биссектрисой угла ADC — 2 балла.

Доказано, что четырёхугольник $CMDN$ вписанный — 1 балл.

За другие начальные продвижения, например, за доказательство равнобедренности треугольника ABK или за равенство $\angle LNM = \angle LAM$, баллы не добавляются.

10.9. Дано натуральное число k. Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться? (*М. Тихомиров, Ф. Петров*)

Ответ. $3k - 1$.

Решение. Пронумеруем столбы от 1 до n вдоль дороги и примем за 1 расстояние между соседними столбами. Пару одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, будем называть *хорошей*.

Оценка. Пусть n столбов покрашены так, что условие задачи выполнено. Пусть n_i — количество столбов i-го цвета (далее считаем, что $n_i \geqslant 1$, т.е. все цвета присутствуют, иначе можно увеличить n, добавить столб нового цвета в конец). Пусть a_i и b_i — номера первого и последнего столбов i-го цвета.

Всего у нас есть $t = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + \ldots + n_k) - k = n - k$ хороших пар столбов. Поскольку все расстояния между столбами в хороших парах различны, наименьшее из этих расстояний не меньше 1, следующее — не меньше 2, и т.д. Так, для суммы S расстояний во всех хороших парах получаем оценку $S \geqslant 1 + 2 + \ldots + t = t(t+1)/2$.

С другой стороны, сумма всех расстояний для i-го цвета равна $b_i - a_i$. Поэтому $S = (b_1 + \ldots + b_k) - (a_1 + \ldots + a_k)$. Сумма $b_1 + \ldots + b_k$ не превышает суммы k самых больших среди номеров $1, 2, \ldots, n$, а сумма $a_1 + \ldots + a_k$ не меньше, чем сумма k наименьших среди номеров $1, 2, \ldots, n$, поэтому $S \leqslant (n + (n - 1) + \ldots + (n - k + 1)) - (1 + 2 + \ldots + k) = k(n - k) = kt$.

Итак, $t(t+1)/2 \leqslant S \leqslant kt$, откуда $t \leqslant 2k-1$ и $n = k+t \leqslant 3k-1$.

Пример. Годится, например, покраска

$$1, 2, \ldots, k-1, k, k, k-1, \ldots, 2, 1, 2, 3, \ldots, k-1, k.$$

Здесь для цвета 1 единственная хорошая пара, и расстояние между столбами в ней равно $2k - 1$. Для всех остальных цветов есть две хорошие пары, при этом для цвета 2 имеем расстояния $2k - 3$ и 2, для цвета 3 — расстояния $2k - 5$ и 4, и т.д., для цвета k — расстояния 1 и $2k - 2$.

Замечание. Существуют и другие, более сложные примеры. Например, можно первые k столбов покрасить в цвета $1, 2, \ldots, k$, а дальше столб с номером $k + s$, где $s = 2^p(2q - 1)$, окрасить в цвет q (скажем, для $k = 8$ покраска будет выглядеть так: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 3, 6, 2, 7, 4, 8$). Возможно индуктивное описание подходящих примеров.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

За решение задачи для конкретных небольших значений n без обобщения на произвольное n — баллы не начисляются.

За доказательство более слабой оценки или построения примера с $n < 3k - 1$ баллы не начисляются.

Если в решении (явно или неявно) предполагается, что все k цветов используются — баллы не снимаются.

Части «*оценка*»+«*пример*» оцениваются в 5+2 балла.

Оцениваются (и суммируются) следующие продвижения в части «оценка»:

(а) Найдено количество хороших пар столбов ($n-k$ в случае использования всех k цветов) — 1 балл.

(б) Доказана нижняя оценка $S \geqslant 1+2+\ldots+(n-k) = (n-k)(n-k+1)/2$ — 1 балл.

(в) Доказана верхняя оценка $S \leqslant k(n-k)$ — 2 балла.

Для получения 2 баллов за часть «пример» достаточно предъявить подходящую покраску и показать, что она подходит. В случае покраски из решения доказательство того, что она подходит, очевидно, за отсутствие объяснения, что она подходит, баллы не снижаются. В случае предъявления неочевидных верных примеров (как, например, в замечании), за отсутствие доказательства, что покраска подходит, снимается 1 балл.

10.10. Докажите, что для любых трёх положительных вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2}+(y-z)\sqrt{3y^2+z^2}+(z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant 0.$$

(*П. Бибиков*)

Решение. Докажем, что $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant (x-y)(x+y) = x^2-y^2$. Если $x \geqslant y$, то $x-y \geqslant 0$ и $\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+2xy+y^2} = x+y$. Если же $x \leqslant y$, то $x-y \leqslant 0$ и $\sqrt{3x^2+y^2} \leqslant \sqrt{x^2+2xy+y^2} = x+y$.

Складывая доказанное неравенство $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant x^2-y^2$ с аналогичными неравенствами $(y-z)\sqrt{3y^2+z^2} \geqslant y^2-z^2$ и $(z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant z^2-x^2$, получаем требуемое.

Комментарий. Нужное неравенство выведено из неравенства $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} \geqslant x^2-y^2$, которое не доказано или неверно доказано (например, доказано только при $x \geqslant y$) — 3 балла.

11 класс

11.6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \ldots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$? (*А. Кузнецов*)

Ответ. Нет.

Решение. Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geqslant 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \ldots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Замечание. Можно показать, что $S_{m+1} > S_m$ только тогда, когда число $m+1$ является степенью некоторого простого числа p; в этом случае отношение S_{m+1}/S_m будет равно p.

Комментарий. Заявлено, что S_{m+1}/S_m не может делиться на квадрат простого числа, но это утверждение не доказано или доказано неверно — 1 балл.

11.7. Назовём два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника. (*Е. Молчанов*)

Ответ. Не всегда.

Решение. Возьмём прямоугольник размера 5×15, половина площади которого равняется $37{,}5$. Для того, чтобы условие выполнялось, из данного прямоугольника необходимо вырезать прямоугольник площади 37 или 38. Таких прямоугольников всего три: 1×37, 1×38 и 2×19. Заметим, что длинная сторона каждого из таких прямоугольников не меньше 19. С другой стороны, диагональ исходного прямоугольника равняется $\sqrt{250}$, но $\sqrt{250} < \sqrt{256} = 16 < 19$, поэтому ни один из таких прямоугольников вырезать из прямоугольника 5×15 нельзя.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Верный пример вырезания без полного обоснования — не более 4 баллов.

Пример работает только в случае, когда прямоугольник вырезается по линиям сетки — не более 2 баллов.

11.8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. На биссектрисе угла ABC внутри треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD — точка E так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников AOE и COD соответственно. Докажите, что точки A, C, P и Q лежат на одной прямой или на одной окружности. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим вторую точку пересечения биссектрисы угла ABC с окружностью, описанной около треугольника ABC, через F (см. рис. 5). Тогда точка F — середина дуги AC, поэтому OF — серединный перпендикуляр к хорде AC. Поскольку вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу, то $\angle FOC = 2\angle FBC$. С другой стороны, так как $BD = DC$, то $\angle DCB = \angle CBD$, а тогда $\angle CDF = \angle DCB + \angle DBC = 2\angle DBC = 2\angle FBC$ как внешний к треугольнику BCD. Таким образом, $\angle FOC = \angle FDC$, поэтому точка F лежит на окружности, описанной около треугольника COD. Рассуждая аналогично, мы получаем, что $\angle AOF = 2\angle ABF = \angle AEF$, и точка F лежит и на окружности, описанной около треугольника AOE. Значит, точки P и Q — центры описанных окружностей треугольников AOF и COF, а эти треугольники симметричны относительно OF. Получается, что точки P и Q также симметричны относительно OF. Следовательно, либо точки P и Q лежат на прямой AC, либо P, Q, A, C — вершины равнобокой трапеции, а потому лежат на одной окружности.

Комментарий. Построена середина меньшей дуги AC окружности ABC (в решении названа F) — 0 баллов.

Доказано, что F лежит на одной из окружностей, описанных около треугольников AOE и COD — 3 балла.

Доказано, что точка F лежит на обеих окружностях — 4 балла.

Доказано, что радиусы окружностей равны — 1 балл.

Доказано, что точки P и Q симметричны относительно се-

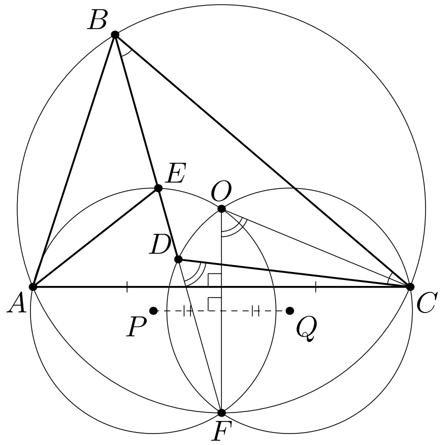

Рис. 5

рединного перпендикуляра к AC, далее упущен случай, когда они лежат на прямой AC — баллы не снимаются.

Баллы за указанные продвижения не суммируются.

11.9. Даны ненулевые числа a, b, c. Докажите, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right|+|bc+1|>1.$$

(*А. Кузнецов*)

Решение. Положим $d=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$. Теперь заметим, что

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right|+|bc+1|=|bd+1|+|cd+1|+|bc+1|.$$

Если $d=0$, то два из этих слагаемых равны 1, и тем самым сумма не меньше, чем 2. В противном случае числа a, b, d отличны от нуля. Значит, какие-то два из них одного знака, а тогда их произведение положительно, и соответствующее слагаемое больше 1. Поскольку два других слагаемых неотрицательные, то общая сумма больше 1.

Комментарий. Доказано нестрогое неравенство вместо строгого — снимается 1 балл.

Не разобран случай $d=0$ — снимается 1 балл.

11.10. В стране $2n$ городов (n — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на k межобластных и m внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geqslant n$. (*М. Дидин*)

Решение. Докажем индукцией по n, что в любом связном графе, содержащем $2n$ вершин, их можно покрасить в красный и синий цвета таким образом, что число рёбер с разноцветными концами (будем называть такие рёбра *разноцветными*) будет превосходить число рёбер с одноцветными концами (будем называть такие рёбра *одноцветными*) хотя бы на n — из этого будет следовать утверждение задачи. База $n = 1$ тривиальна, докажем переход.

Предположим, в графе с $2n$ вершинами найдётся пара вершин, соединённых ребром, при удалении которых граф не теряет связность; обозначим эти вершины через u и v. Покрасим оставшиеся вершины таким образом, чтобы число разноцветных рёбер было хотя бы на $n - 1$ больше числа одноцветных рёбер — так можно сделать по предположению индукции. Заметим, что вершины u и v теперь можно покрасить таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных рёбер увеличится. В самом деле, без ограничения общности будем считать, что если вершины u и v не имеют обе чётные степени, то вершина u имеет нечётную степень. Тогда покрасим вершину u в цвет, который имеет меньшинство её соседей (в случае равенства покрасим в любой цвет), а затем покрасим таким же образом вершину v. Очевидно, при каждой покраске требуемая разность не уменьшилась, и хотя бы при одной покраске у соответствующей вершины было нечётное число покрашенных соседей, то есть разность при этой покраске увеличилась. Поскольку до покраски вершин u и v разность между числом разноцветных рёбер и числом одноцветных рёбер была не меньше $n - 1$, после этой покраски она стала не меньше n.

С другой стороны, если в графе найдётся пара висячих вершин, то, очевидно, при их удалении граф по-прежнему не теряет связность, и тем же самым алгоритмом можно покрасить весь остальной граф, а затем и эти висячие вершины, таким образом, что разность между количествами разноцветных и одноцветных рёбер будет не меньше n. Докажем, что в любом связном графе хотя бы с тремя вершинами или найдутся две смежные вершины, при удалении которых граф останется связным, или найдутся две висячие вершины.

В самом деле, рассмотрим произвольное остовное дерево этого графа и подвесим его за любую не висячую вершину. Пусть v — наиболее удалённая от корня висячая вершина этого дерева, а u — предок этой вершины. Обозначим потомков этого предка через $v_1, \ldots, v_k$. Заметим, что вершины $v_1, \ldots, v_k$ являются висячими в рассматриваемом остовном дереве. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть пара вершин, соединённых ребром в исходном графе. Тогда при удалении этих двух вершин остовное дерево (а значит, и сам исходный граф) сохраняет связность.

Случай 2. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть пара вершин, являющихся висячими в исходном графе. Значит, в исходном графе есть хотя бы две висячие вершины.

Случай 3. Среди вершин $v_1, \ldots, v_k$ есть не больше одной вершины, являющейся висячей в исходном графе. Без ограничения общности, будем считать, что если такая вершина есть, то это вершина v_1. Тогда переподвесим каждую из вершин $v_2, \ldots, v_k$ к любому из её соседей, отличных от u: поскольку эти вершины не являются висячими в исходном графе, такой сосед всегда найдётся. После всех переподвешиваний вершины u и v_1 можно будет удалить из графа, и остовное дерево останется связным — а значит, и сам граф.

Поскольку хотя бы один из случаев имеет место, и в каждом из них в графе есть или пара смежных вершин, при удалении которых граф остаётся связным, или пара висячих вершин, переход индукции доказан.

Замечание. Неравенство из задачи является точным: в частности, в полном графе на $2n$ вершинах соответствующая разность не может быть строго больше n.

Комментарий. Решение сведено к доказательству утверждения о том, что в любом связном графе хотя бы с тремя вершинами или найдутся две смежные вершины, при удалении которых граф остаётся связным, или найдутся две висячие вершины — 3 балла.